

Aula 1

“A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens.”
 (Descartes)

TEORIA DOS CONJUNTOS

Símbolos

$\in$: pertence	$\exists$: existe
$\notin$: não pertence	$\nexists$: não existe
$\subset$: está contido	$\forall$: para todo (ou qualquer que seja)
$\not\subset$: não está contido	$\emptyset$: conjunto vazio
$\supset$: contém	$\mathbf{N}$: conjunto dos números naturais
$\not\supset$: não contém	$\mathbf{Z}$: conjunto dos números inteiros
$/$: tal que	$\mathbf{Q}$: conjunto dos números racionais
$\Rightarrow$: implica que	$\mathbf{Q}' = \mathbf{I}$: conjunto dos números irracionais
$\Leftrightarrow$: se, e somente se	$\mathbf{R}$: conjunto dos números reais

Símbolos das operações

$A \cap B$: A intersecção B
$A \cup B$: A união B
$A - B$: diferença de A com B
$A < B$: A menor que B
$A \leq B$: A menor ou igual a B
$A > B$: A maior que B
$A \geq B$: A maior ou igual a B
$A \wedge B$: A e B
$A \vee B$: A ou B

Conjuntos Numéricos

Conjunto dos Números Naturais

Trata-se do conjunto $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$.

Foi definido o conjunto $\mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, que é o conjunto dos naturais excluído o zero.

Então, $\mathbf{N}^*$ é subconjunto de $\mathbf{N}$, ou seja: $\mathbf{N}^* \subset \mathbf{N}$

O conjunto dos números naturais ($\mathbf{N}$) é fechado para as operações adição e multiplicação. Isto significa que dados dois números naturais, a sua soma e multiplicação é um número natural.

Porém, a subtração de dois números naturais não necessariamente é um natural. Por exemplo, esta operação entre $1 \in \mathbf{N}$ e $5 \in \mathbf{N}$ é $1 - 5 = -4 \notin \mathbf{N}$.

Assim define-se o conjunto dos números inteiros.

Conjunto dos Números Inteiros

Trata-se do conjunto $\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

São subconjuntos de $\mathbf{Z}$:

- Conjunto dos números inteiros não negativos: $\mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbf{N}$
- Conjunto dos números inteiros não positivos: $\mathbf{Z}_- = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0\}$
- Conjunto dos números inteiros não nulos: $\mathbf{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$
- Conjunto dos números inteiros positivos: $\mathbf{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbf{N}^*$
- Conjunto dos números inteiros negativos: $\mathbf{Z}_-^* = \{\dots, -4, -3, -2, -1\}$

Este conjunto é fechado para as operações de soma, subtração e multiplicação. Porém, dados dois números inteiros, a divisão entre eles não é necessariamente um inteiro.

Números Racionais

Trata-se do conjunto

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Este conjunto é fechado para as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão.

Em geral temos

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$$

Todo número racional pode ser representado sob a forma decimal e sua representação é infinita e periódica.

Por exemplo, $\frac{1}{2} = 0,5000\dots$; $\frac{1}{3} = 0,3333\dots$

Números Reais

Os números reais são definidos por

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$$

onde $\mathbf{I}$ é o conjunto dos números irracionais.

O conjunto dos irracionais foi “descoberto” quando se constatou que os racionais, embora fosse um conjunto denso (entre dois racionais há infinitos racionais), estes não englobam todos os números.

Os números irracionais são aqueles que podem ser escritos sob a forma decimal infinita, mas não periódica.

Por exemplo: $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$; $\pi = 3,141492\dots$

Toda raiz quadrada de número inteiro cujo resultado não seja inteiro é um número irracional.

Os números reais podem ser representados como pontos numa reta ordenada, com o zero sendo a origem. Daí, todo valor à direita de zero é positivo e este valor é a distância até a origem. A idéia é a mesma para valores menores do que zero.

Intervalos

Sendo a e b dois números reais, com $a < b$, temos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ chamados intervalos.

Intervalo aberto: $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$

Intervalo fechado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$

Intervalo semi-aberto à direita: $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$

Intervalo semi-aberto à esquerda: $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$

Intervalo infinitos: $] -\infty, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < +\infty\}$

$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < +\infty\}$

$] -\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / -\infty < x \leq a\}$

$] -\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} / -\infty < x < a\}$

Exercícios

1) Usando a notação de conjunto escrever os intervalos

- a) $] -3, 6[$ b) $] \pi, 6[$ c) $] \sqrt{2}, \sqrt{3}]$ d) $[-1, 0[$ e) $] -\infty, 0[$

2) Se $A = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x < 8\}$ determinar:

- a) $A \cap B$ b) $A - B$ c) $B - A$

3) Representar os seguintes intervalos:

- a) $[-1, 1]$ b) $[0, 10[$ c) $] -3, 1]$ d) $]4, 6[$ e) $]5, +\infty[$

4) Resolver graficamente

- a) $] \pi, 6] \cup [-1, 1[$ b) $] \sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap [\frac{1}{2}, 3]$

5) Diga quais das sentenças são verdadeiras e quais são falsas.

- a) $0 \in \mathbb{N}$ b) $(2-3) \in \mathbb{N}$ c) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ d) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z}$
e) $\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_- = \emptyset$ f) $(-3)^2 \in \mathbb{Z}_-$ g) $(-4)(-5) \in \mathbb{Z}_+$ h) $0 \in \mathbb{Z}_-$

- i) $(5-11) \in \mathbb{Z}$ j) $\pi \in \mathbb{Q}$ k) $\sqrt{5} \in \mathbb{N}$ l) $\frac{2}{3} \in \mathbb{Z}$
- m) $\sqrt{-1} \in \mathbb{R}$ n) $-3 \in \mathbb{Z}$ o) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ p) $\pi \in \mathbb{I}$
- q) $0,43 \in \mathbb{Q}$ r) $2\pi \in \mathbb{Q}$ s) $2,4444... \in \mathbb{I}$
- t) $\{\emptyset\}$ é um conjunto unitário
- u) $\{\}$ é o conjunto vazio v) $B \cap A \subset A \cup B$ x) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

6) Representar graficamente os intervalos dados pelas desigualdades:

- a) $2 \leq x \leq 7$ b) $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{5}$ c) $0 \leq x < 2$ d) $-\infty < x < -1$

7) Sejam $M = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x < 10\}$, $N = \{x \in \mathbb{R} / 3 < x < 8\}$ e $P = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x \leq 9\}$. Determinar o conjunto $P - (M - N)$.

9) Em uma cidade existem dois clubes A e B, que tem juntos 6000 sócios. O clube A tem 4000 sócios e os dois clubes têm 500 sócios comuns. Quantos sócios tem o clube B? Quantos são os sócios do clube B que não são sócios do clube A?

10) Seja $A = \{a, b, c, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{d, e, f, 3, 7, 8\}$. Determinar $A - B$, $A \cap B$, $A \cup B$, $B - A$.

11) Em uma cidade existem três cavalos X, Y, Z que participam de um páreo em uma corrida de cavalos. X e Y tem 400 apostadores em comum. Os cavalos Y e Z têm 300 apostadores em comum. Os cavalos X e Z não têm apostadores em comum. X e Y têm juntos 9000 apostadores e Y e Z têm juntos 8000 apostadores. Sabendo que Z tem 3000 apostadores determinar o número de apostadores dos cavalos X e Y.

12) Uma cidade possui 10000 habitantes, que frequentam três clubes recreativos, divididos da seguinte forma: 45% frequentam o clube A; 29% frequentam o clube B; 53% frequentam o clube C; 25% frequentam somente o clube A; 10% frequentam somente o clube B; 30% frequentam somente o clube C; 9% frequentam os clubes A e C. Sabendo que A, B e C possuem frequentadores em comum, e que sempre existem frequentadores em comum a dois clubes, determine o número de habitantes que frequentam mais de um clube.